

Exakte Bestimmung der Fallbeschleunigung auf der Erde

Florian Grunert

Zabel-Gymnasium Gera

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	2
Einleitung	3
1 Modell der Punktmasse-Kugel	3
1.1 Gravitation	3
1.2 Zentrifugalbeschleunigung	3
1.3 Zusammenführung der Beschleunigungen	4
1.4 Genauigkeit	5
2 Modell des Punktmasse-Ellipsoiden	6
2.1 Gravitation	6
2.2 Zentrifugalbeschleunigung	7
2.3 Zusammenführung der Beschleunigungen	8
2.4 Genauigkeit	9
3 Modell unendlich vieler Punktmassen	10
3.1 Kugel	10
3.1.1 Gravitation	10
3.1.2 Zentrifugalbeschleunigung	12
3.1.3 Zusammenführung der Potentiale	12
3.1.4 Genauigkeit	12
3.2 Ellipsoid	12
3.3 Genauigkeit	13
4 Bestimmung der Höhe basierend auf Gravimetrie	14
4.1 Nach Modell der Kugel-Punktmasse	14
4.2 Nach Modell der Ellipsoiden-Punktmasse	14
4.3 Nach Modell der Ellipsoiden-Infinitesimal-Punktmasse	14
4.4 Genauigkeit	14
5 Didaktik	15
Zusammenfassung und Ausblick	16
Abbildungs-, Unterstützer- und Quellenverzeichnis	18

Kurzfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Fallbeschleunigung auf der Erde mit Hilfe einer Formel möglichst genau zu berechnen. Dabei werden drei vielversprechende Modelle betrachtet: Einerseits wird versucht, das Ziel mit Hilfe des standardmäßig gelehrteten Punktmasse-Modells der Erde zu erreichen.

Da dieses aber der Realität widerspricht, liegt es daher näher, andere Methoden der Analysis, wie z. B. die Integralrechnung anzuwenden, wodurch die Erde in viele Punktmassen zerlegbar ist. Dadurch lässt sich die Genauigkeit im Vergleich zu vorherigen Methoden um bis zu 100 % erhöhen. In den vorherigen Modellen muss beachtet werden, dass die Erde ein Ellipsoid ist, was bei dem einfach zu berechnenden Kugelmodell ignoriert werden kann. Dies könnte allerdings auch zu ungenaueren Ergebnissen führen.

Ziel der Arbeit ist es auch, Lernende nachvollziehen zu lassen, wieso die gemessene Fallbeschleunigung meist vom Standardwert abweicht. Die dazugehörige Analyse ergab, dass sich der Aufwand zum Verstehen der Formel aufgrund der vielen verschiedenen Einflüsse mit zunehmender Genauigkeit erhöht.

Weiterhin ist es bei bekannter, heutzutage durch Mobiltelefone messbarer Fallbeschleunigung möglich, die gewonnenen Berechnungsverfahren weiterzuverwenden, z. B. zur Bestimmung der Höhe der aktuellen Position über Normalnull (NN).

Einführung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Fallbeschleunigung auf der Erde mit Hilfe einer Formel möglichst genau zu berechnen. Die Fragestellung lautet also: „Wie genau lässt sich die Fallbeschleunigung auf der Erde rechnerisch bestimmen?“

Betrachtet wird dabei das Modell der Punktmasse und das unendlich vieler Punktmassen, beides bezogen auf die Erde als Kugel und als Ellipsoid.

Weiterhin wird einbezogen, inwieweit es möglich ist, die Formel mittels Umstellen weiter zu verwenden, beispielsweise zur Berechnung der aktuellen Höhe bei bekannter Fallbeschleunigung.

Auch die didaktische Perspektive soll dabei ein Thema sein.

1 Modell der Punktmasse-Kugel

1.1 Gravitation

Es ist allgemein bekannt, dass die Fallbeschleunigung von der Masse m und dem Erdradius r_E abhängig ist. In regulären Tafelwerken ist daher angegeben, dass die Fallbeschleunigung g auf der Erde normalerweise durch (1.1) ausgerechnet wird.

$$a_g = \frac{G \cdot m_E}{r_E^2} \quad (1.1)$$

Allerdings kann es geschehen, dass ein Körper, auf welchen dann die Fallbeschleunigung angewendet werden soll, sich über der Erdoberfläche befindet. Daher wird die Formel um die Höhe über NN h erweitert (1.2).

$$a_g = \frac{G \cdot m_E}{(r_E + h)^2} \quad (1.2)$$

1.2 Zentrifugalbeschleunigung

Aufgrund der Tatsache, dass die Erde rotiert, wird ein sich auf selbiger befindlicher Körper von ihr „weggezogen“, was den Effekt der Gravitation verringert. Üblicherweise wird diese Zentrifugalbeschleunigung a , abhängig vom Abstand zur Drehachse des Körpers r_D durch (1.3) berechnet.

$$a = \frac{v^2}{r_D} \quad (1.3)$$

Nun ist nur noch die Bahngeschwindigkeit v nach bekannter Formel (1.4) auszurechnen.

$$v = \frac{2\pi \cdot r_D}{T} \quad (1.4)$$

Die Periode T ist bekannt; sie beträgt ungefähr 24 h. Fügt man nun (1.3) und (1.4) zusammen, so erhält man (1.5) zur Berechnung der Zentrifugalbeschleunigung, wobei allerdings auch hier der Radius r_D mit der Höhe zu $(r_D + h)$ ergänzt werden muss.

$$a_{\text{zentrifugal}} = \frac{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}{r_D} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (r_D + h)}{T^2} \quad (1.5)$$

Weil die Zentrifugalbeschleunigung aber wie o. g. nicht vom Mittelpunkt der Körpers, sondern vom Abstand zu dessen Drehachse r_D abhängt, wird mittels einfacher trigonometrischer Dreiecksbeziehungen diese Formel der Zentrifugalbeschleunigung in eine solche umgewandelt, wie in Abbildung 1 dargestellt: $r_D = \cos(\varphi) \cdot r_E$ welche vom Abstand zum Erdmittelpunkt r_E abhängt (1.6).

$$a_{zentr} = \cos(\varphi) \cdot \frac{4\pi^2(r_E + h)}{T^2} \quad (1.6)$$

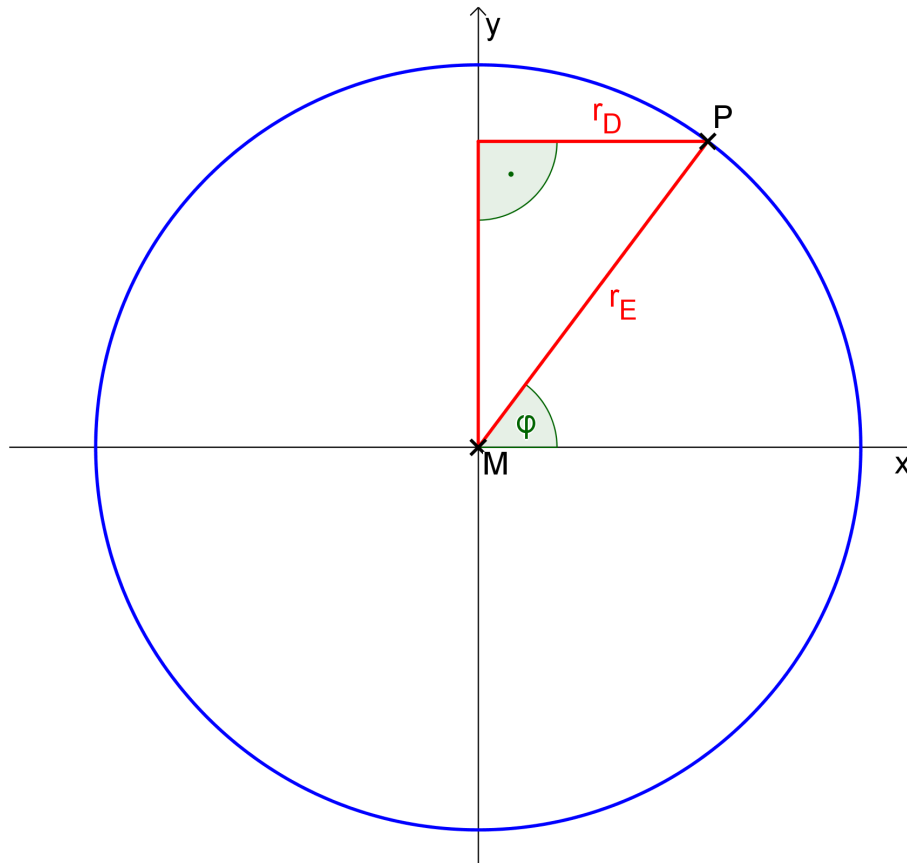


Abbildung 1: Visualisierung der Wirkung der Berechnung des Radius mittels Abstand zur Drehachse

1.3 Zusammenführung der Beschleunigungen

Möchte man nun die korrekte Fallbeschleunigung vom Standort aus senkrecht in Richtung Erdmittelpunkt berechnen, so ist grundlegend nötig, die Zentrifugal- von der Fallbeschleunigung abzuziehen, weil diese „entgegen“ der Fallbeschleunigung wirkt, was unter anderem in Abbildung 3 des folgenden Kapitels zu sehen ist. Demnach würde entsprechend (1.7) verfahren werden müssen.

$$a_{res1} = a_g - a_{zentr} \quad (1.7)$$

Dabei ist „entgegen“ allerdings nicht wörtlich zu nehmen: Dies ist nur auf dem Breitengrad 0 der Fall. Andernfalls steht die Zentrifugal- der Fallbeschleunigung nicht direkt entgegen, weil dabei der Richtungsvektor der Fallbeschleunigung mit dem der Zentrifugalbeschleunigung einen Winkel zwischen 90° nur am Pol oder wie o. g. 180° am Äquator bildet.

Das Operieren mit dieser Formel würde also zu einem starken Fehler führen, weil die Zentrifugalbeschleunigung vom Äquator bis zum Pol immer weiter abnimmt, weshalb (1.8) mit dem Breitengrad φ gilt.

$$g = a_g - \cos(\varphi) \cdot a_{\text{zentri}} \quad (1.8)$$

Daraus ergibt sich dann durch Einsetzen von (1.2) und (1.5) folgende Formel (1.9), nach welcher nun die Fallbeschleunigung auf/über der Erde nach dem Kugelmodell zu berechnen ist:

$$g = \frac{G \cdot m_E}{(r_E + h)^2} - \cos^2(\varphi) \cdot \frac{4\pi^2 \cdot (r_E + h)}{T^2} \quad \text{und } h \geq 0 \text{ m} \quad (1.9)$$

1.4 Genauigkeit

Um die Qualität der Formel zu überprüfen, werden im Folgenden Beispielrechnungen mit (1.9) durchgeführt, auf Plausibilität überprüft und mit Messdaten verglichen.

Für weitere Berechnungen werden untenstehende Werte angenommen. Die Daten für den Radius r_E sowie für die Erdmasse m sind entnommen aus [3], die Erdumdrehungsdauer T aus [4].

$$\begin{aligned} r_E &\approx 6.371.000,8 \text{ m} \\ m_E &= 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ T &= 23,93447232 \text{ h} \end{aligned}$$

Um die Genauigkeit der Formel zu bestimmen, werden die Messwerte g_{real} aus [5] mit den Formelergebnissen g_{Formel} verglichen. Dabei wird versucht, Breitengrade φ von Stationen auf beiden Horizontalhälften der Erde und verschiedenen Längengraden, möglichst in 10° -Abständen und gleichen Höhen über NN h zu wählen. Dabei wird in dieser Tabelle einmalig der Ort und das Land (Code nach ISO 3166 ALPHA-2) angegeben; die Stationen bleiben in den folgenden Betrachtungen immer gleich. Die am nächsten bei Schließlich wird die Differenz der beiden Werte Δg mit $g_{\text{real}} - g_{\text{Formel}}$ gebildet, um die Genauigkeit darzustellen.

Ort	φ in $^\circ$	h in m	g_{real} in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	g_{Formel} in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Δg in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Cayenne, GUF	4,94422	5,000	9,78038	9,78649	-0,00611
Winnellie NT, AUS	-12,43170	20,000	9,78301	9,78777	-0,00476
Maskat, OMN	23,62533	2,000	9,78974	9,79169	-0,00195
Gilles Plains, AUS	-31,86750	155,000	9,79393	9,79522	-0,00129
Peking, CHN	40,24480	121,106	9,80121	9,80002	0,00118
Bad Homburg, DEU	50,22860	188,000	9,81055	9,80569	0,00485
Norrtälje, SWE	59,72686	4,281	9,81860	9,81151	0,00708
Davis-Station, AUS	-68,57617	22,240	9,82573	9,81555	0,01017
Eureka, CAN	79,98890	17,000	9,83013	9,81906	0,01106

Tabelle 1: reale Fallbeschleunigungen im Vergleich zu berechneten Ergebnissen nach dem Punktmasse-Kugel-Modell

2 Modell des Punktmasse-Ellipsoiden

2.1 Gravitation

Der Grund, warum diese Formel (1.9) aus Kapitel 1 bei Standardberechnungen nicht immer zutreffende Ergebnisse liefert, ist, dass bei solchen Berechnungen mit dem durchschnittlichen Erdradius gerechnet wird. Allerdings ist dieser Radius aufgrund der Tatsache, dass die Erde ein Ellipsoid ist, immer verschieden, was folgende Abbildung 2 verdeutlicht:

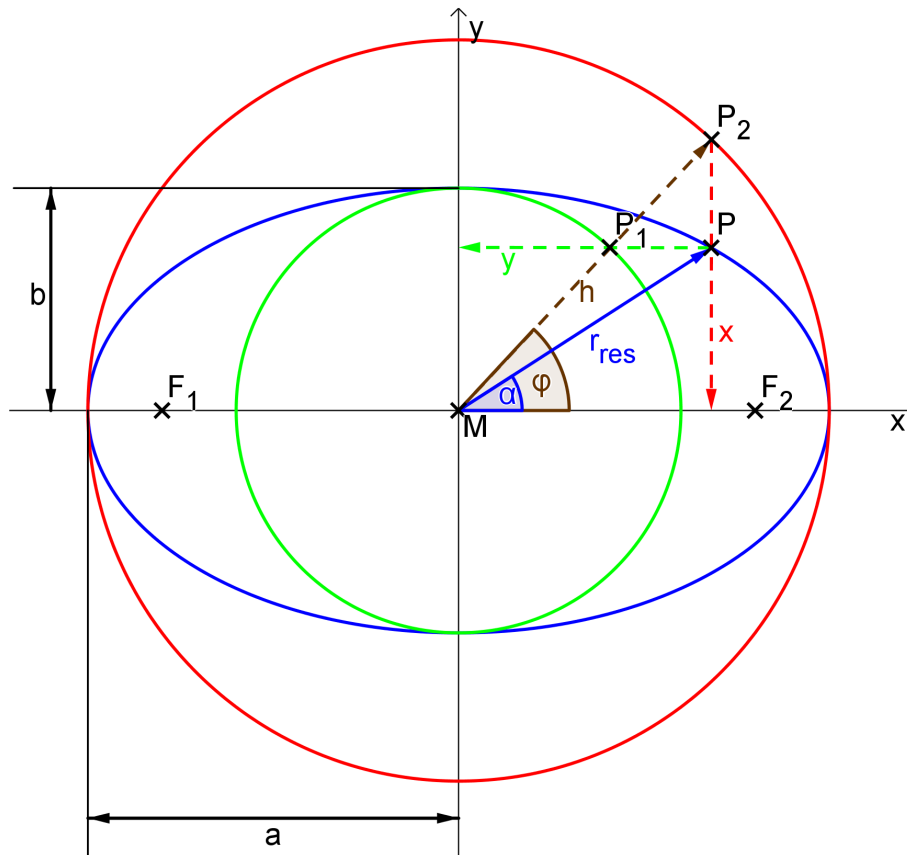


Abbildung 2: Visualisierung der Ellipsenproblematik

Die Ellipse kann als gestauchter Kreis betrachtet werden. Alle y-Koordinaten der Punkte auf der Ellipse sind im Verhältnis $\frac{y_{P1}}{y_P} = \frac{b}{a}$ verkürzt. Lässt man einen Strahl vom Ellipsenmittelpunkt M aus im Winkel φ verlaufen, so ist es möglich, die Koordinaten eines Punktes P auf der Ellipse durch die Koordinaten von den Schnittpunkten auf dem Innkreis (grün) und dem Umkreis (rot) auszudrücken. Die y-Koordinate auf der Ellipse ist identisch mit der y-Koordinate des Punktes auf dem Innkreis P_1 (2.1). Die x-Koordinate des Punktes P auf der Ellipse ist gleich der x-Koordinate des Punktes auf dem Umkreis P_2 (2.2). Damit lauten die Transformationsgleichungen:

$$x = a \cdot \cos(\alpha) \quad (2.1)$$

$$y = b \cdot \sin(\alpha) \quad (2.2)$$

Mit dem Satz des Pythagoras ($r^2 = x^2 + y^2$) erhält man für den Abstand r_{res} des Ellipsenpunktes vom Mittelpunkt den Ausdruck (2.3).

$$r_{res}^2 = a^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + b^2 \cdot \sin(\alpha)^2 \quad (2.3)$$

Nun wird noch ein Zusammenhang zwischen dem Winkel α in dieser Gleichung und dem Polarkoordinatenwinkel φ benötigt, um die Polargleichung der Ellipse zu erhalten. Dieser ist gegeben durch die Definition (2.4):

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a \cdot \cos(\alpha)} \quad (2.4)$$

Durch Umformen und Einsetzen erhält man schließlich die Polargleichung der Ellipse (2.5) bzw. (2.6)/(2.7).

$$r_{res}^2 = a^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + b^2 \cdot \sin(\alpha)^2 \quad (2.5)$$

$$= \frac{b^2}{1 - \left(\frac{e}{a}\right)^2 \cdot \cos(\varphi)^2} \quad (2.6)$$

$$= \frac{b^2}{1 - \epsilon^2 \cdot \cos(\varphi)^2} \quad (2.7)$$

Vgl. [1]

Der resultierende Radius kann nun laut (2.6) entweder mit der linearen Exzentrizität e (2.8) oder der numerischen ϵ (2.9) berechnet werden; der Winkel φ entspricht dabei dem Breitengrad.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.8)$$

$$\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (2.9)$$

Durch Zusammenfügen der Formeln (2.6) und (2.8) ist für den Radius r_E folgende Formel (2.10) die richtige, wobei auch das Zusammenfügen von (2.6) und (2.9) ebenso möglich wäre, wenn man mit der numerischen Exzentrizität arbeiten möchte:

$$r_E = \sqrt{\frac{b^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)^2 \cdot \cos(\varphi)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot \cos(\varphi)^2 + a^2}} \quad (2.10)$$

Eingesetzt in (1.2) ergibt sich daraus nun die reine Fallbeschleunigungsformel im Bezug auf die Gravitation für den Ellipsoiden (2.11).

$$a_g = \frac{G \cdot m_E}{\left(\sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot \cos(\varphi)^2 + a^2}} + h\right)^2} \quad (2.11)$$

2.2 Zentrifugalbeschleunigung

Die Zentrifugalbeschleunigung ist grundsätzlich ebenso zu berechnen, wie bei der Kugel; jedoch muss auch hier wieder mit dem exakten Radius gerechnet werden, der aber jetzt einfach in die bekannte Zentrifugalbeschleunigungsformel (1.5) als (2.10) eingesetzt werden kann.

$$a_{zentri} = \cos(\varphi) \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot \cos(\varphi)^2 + a^2}} + h\right)}{T^2} \quad (2.12)$$

2.3 Zusammenführung der Beschleunigungen

Die beiden Beschleunigungen nun zusammenzuführen ist nicht mehr so einfach, wie es bei der Kugel war, weil (1.8) nun nicht mehr vollständig gilt. Zwar ist es weiterhin richtig, dass die wirkende Zentrifugalbeschleunigung mit zunehmendem Breitengrad abnimmt, jedoch besteht nun, wie in Abb. 2 ersichtlich ist, nicht mehr die Tatsache, dass der berechnete Vektor vom auf der Erde stehenden Menschen geradewegs nach unten in das „Gravitationszentrum“, den Erdmittelpunkt führt (a_g), sondern daran vorbei (a_{res_1}).

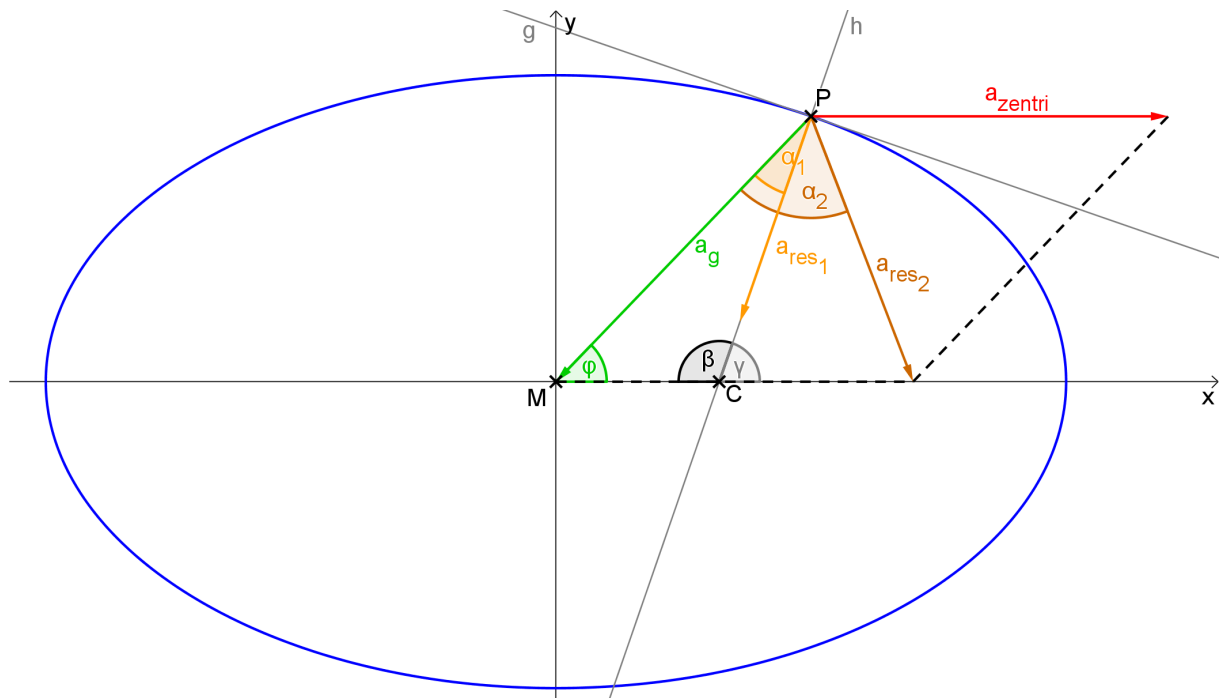


Abbildung 3: Visualisierung der verschiedenen Beschleunigungen

Die Methode, die Beschleunigungen in irgendeiner Form mit einem Kräfteparallelogramm zu verbinden, würde hierbei auch fehlschlagen, wie Vektor a_{res_2} zeigt, der ebenfalls nicht der Senkrechten a_{res_1} entspricht.

Wie bereits oben angedeutet, nimmt die Fallbeschleunigung a_g mit größer werdendem Winkel α immer weiter ab, weil der Vektor dann nicht mehr in Richtung Mittelpunkt M zeigt und sie immer weniger der tatsächlichen Fallbeschleunigung a_{res_1} entspricht. Deshalb gilt (2.13), wobei (1.8) nur um den Vorfaktor $\cos(\alpha)$ von a_g erweitert wird, um den Wert des Vektors zu korrigieren.

$$a_{res_1} = \cos(\alpha) \cdot a_g + \cos(\varphi) \cdot a_{zentri} \quad (2.13)$$

Doch wie lässt sich nun α bestimmen? Weil β und γ Nebenwinkel sind, ergänzen sich selbige zu 180° , wodurch sich β berechnen lässt (2.14). Weiterhin beträgt die Innenwinkelsumme eines Dreiecks 180° (2.15), die Berechnung des Winkels α schließlich ermöglicht (2.16).

$$\beta + \gamma = 180 \Rightarrow \beta = 180 - \gamma \quad (2.14)$$

$$\varphi + \alpha + \beta = 180 \Rightarrow \alpha = 180 - \varphi - \beta \quad (2.15)$$

$$\alpha = 180 - \varphi - (180 - \gamma) = \gamma - \varphi \quad (2.16)$$

Nun befindet sich allerdings noch eine Unbekannte in der Gleichung, nämlich der Normalenwinkel γ . Um diesen zu beseitigen, ist ein Zusammenhang von φ , δ und dem Ellipsenparameter t aufzustellen; letzterer ist in der Parameterdarstellung der Ellipse (2.17) zu finden und lässt auf besagten Zusammenhang (2.18) schließen, vgl. [2].

$$a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t), 0 \leq t < 2\pi \quad (2.17)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \cdot \tan(t) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \tan(\gamma) = (1 - \epsilon^2) \cdot \tan(\alpha) \Rightarrow \tan(\gamma) = \frac{a^2 \cdot \tan(\varphi)}{b^2} \quad (2.18)$$

Durch Einsetzen von (2.18) in (2.16) entsteht nun (2.19).

$$\alpha = 180 - \varphi - \left(180 - \arctan \left(\frac{a^2 \cdot \tan(\varphi)}{b^2} \right) \right) = \arctan \left(\frac{a^2 \cdot \tan(\varphi)}{b^2} \right) - \varphi \quad (2.19)$$

Und damit entsteht schlussendlich die Gleichung (2.20) zur Berechnung einer Fallbeschleunigung auf einem Ellipsoiden, abhängig vom Breitengrad eines Punktes.

$$g = \cos \left(\arctan \left(\frac{a^2 \cdot \tan(\varphi)}{b^2} \right) - \varphi \right) \cdot \frac{G \cdot m_E}{\left(\sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot \cos^2(\varphi) + a^2} + h} \right)^2} \quad (2.20)$$

$$\cos^2(\varphi) \cdot \frac{4\pi^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot \cos^2(\varphi) + a^2} + h} \right)}{T^2} \text{ und } h \geq 0 \text{ m}$$

2.4 Genauigkeit

Um die Qualität der Formel zu überprüfen, werden im Folgenden Beispielrechnungen mit (2.20) durchgeführt, auf Plausibilität überprüft und mit Messdaten verglichen.

Für diese Berechnungen werden untenstehende Werte angenommen. Die Daten für die Radii a und b sowie für die Erdmasse m sind entnommen aus [3], die Erdumdrehungsdauer T aus [4].

$$\begin{aligned} a &= 6.378.137 \text{ m} \\ b &= 6.356.752,314 \text{ m} \\ m &= 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ T &= 23,93447232 \text{ h} \end{aligned}$$

Um die Genauigkeit der Formel zu bestimmen, werden Messwerte aus [5] mit Formelergebnissen verglichen. Dabei wird versucht, Breitengrade von Stationen auf beiden Horizontalhälften der Erde und verschiedenen Längengraden, möglichst in 10°-Abständen zu wählen.

Um die Genauigkeit der Formel zu bestimmen, werden die Messwerte g_{real} aus [5] mit den Formelergebnissen g_{Formel} verglichen. Dabei wird versucht, Breitengrade φ von Stationen auf beiden Horizontalhälften der Erde und verschiedenen Längengraden, möglichst in 10°-Abständen und gleichen Höhen über NN h zu wählen. Schließlich wird die Differenz der beiden Werte Δg mit $g_{real} - g_{Formel}$ gebildet, um die Genauigkeit darzustellen.

φ in $^\circ$	h in m	g_{real} in $\frac{m}{s^2}$	g_{Formel} in $\frac{m}{s^2}$	Δg in $\frac{m}{s^2}$
4,94422	5,000	9,78038	9,76498	0,01539
-12,43170	20,000	9,78301	9,76882	0,01418
23,62533	2,000	9,78974	9,78029	0,00944
-31,86750	155,000	9,79393	9,79162	0,00230
40,24480	121,106	9,80121	9,80558	-0,00437
50,22860	188,000	9,81055	9,82270	-0,01215
59,72686	4,281	9,81860	9,83877	-0,02017
-68,57617	22,240	9,82573	9,85079	-0,02506
79,98890	17,000	9,83013	9,86113	-0,03100

Tabelle 2: reale Fallbeschleunigungen im Vergleich zu berechneten Ergebnissen nach dem Ellipsoiden-Punktmasse-Modell

3 Modell unendlich vieler Punktmassen

Im Modell eins und zwei geht man davon aus, dass die Erde eine Punktmasse ist. Betrachtet man das Modell der Kugel, so ist dies sicherlich eine annehmbare Vereinfachung, jedoch trifft dies bereits beim Ellipsoiden nicht mehr zu. Um dieses Problem korrekt lösen zu können, muss man sich anderen als den bisher vertrauten Funktionen des Werkzeuges Mathematik bedienen, nämlich der Integral- und Differentialrechnung aus dem Bereich der Analysis.

Um die Fallbeschleunigung auf o.g. Weise an einem Ort zu bestimmen, eignet sich besonders das Gravitationspotential U bzw. U_g für das ausschließlich durch die Erdmasse verursachte Potential. Dieses Gravitationspotential, was sich ähnlich vorzustellen ist, wie das elektrische Potential, hat die Eigenart, dass dessen Stärke an einem jeweiligen Ort gleich der potentiellen Energie einer Einheitsmasse dort ist. Die Ursache dafür ist die Äquivalenz von träger und schwerer Masse. [6] Wie es auch in [7] geschrieben steht, ergibt sich dann für eine Masse (3.1).

$$E_{pot} = m \cdot U_g \text{ und } dE_{pot} = m \cdot dU_g \text{ bei } m = \text{konst.} \quad (3.1)$$

Diese potentielle Energie entspricht dabei der Arbeit im Gravitationsfeld W , der $F \cdot s$ bzw. $F \cdot r$ zu Grunde liegt. Daraus entsteht (3.2).

$$dE_{pot} = dW = F \cdot dr \quad (3.2)$$

Weil nach Newton der Zusammenhang $F = m \cdot a$ gilt, ist F in (3.2) dadurch ersetzbar. Umgestellt nach a als g entsteht dann mit (3.1) folgende Gleichung für die Fallbeschleunigung abhängig vom Gravitationspotential (3.3):

$$m \cdot dU_g = m \cdot a \cdot dr \rightarrow a = g = \frac{dU_g}{dr} \quad (3.3)$$

3.1 Kugel

3.1.1 Gravitation

Um nun aber das Gravitationspotential zu berechnen, muss für die „Standardformel“ für die Fallbeschleunigung (1.9) und eben erhaltene Formel (3.3) gleichgesetzt und nach U_g

umgestellt werden, wie (3.4) zeigt.

$$\frac{dU_g}{dr} = G \cdot \frac{m}{r^2} \rightarrow U_g = G \cdot m \cdot \int \frac{dr}{r^2} = \int dU_g \quad (3.4)$$

Möchte man nun aber alle infinitesimal kleinen Massenpunkte in dieser Kugel addieren, so muss man eine Summe des folgenden Aussehens bilden: (3.5)

$$U_g = \sum_i \frac{m_E}{r'_i} \quad (3.5)$$

Daraus kommt schließlich (3.6) und (3.7) hervor, wenn man obige Gleichungen auf ein Dichtekontinuum anwenden möchte, wobei die Grundlage dazu $\rho = \frac{m}{V}$ ist.

$$U_g = G \cdot \int_V \frac{\rho(r_V)}{r'} dV \quad (3.6)$$

Damit können nun die Gravitationspotentiale aller unendlich kleinen Volumenstückchen („Volumenelemente“) in einer Kugel berechnet werden, ähnlich wie bei Kuchenstückchen in einer Torte. Die Volumina sollten dabei aber besser ausgeschrieben werden, was mit der Kenntnis, dass dazu die drei Raumdimensionen zu multiplizieren sind, im Integral $dV_V = \sin(\varphi_V) \cdot r_V^2 \cdot dr_V \cdot d\varphi_V \cdot d\lambda_V$ bedeutet, wobei λ_V dem Längengrad des Volumenelements entspricht. Setzt man dies ein, so führt dies zu (3.7).

$$U_g = G \cdot \int_0^{r_E} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r_V) \cdot r_V^2 \cdot \sin(\varphi_V)}{r'} dr_V d\varphi_V d\lambda_V \quad (3.7)$$

r' bezeichnet bei diesen Gleichungen den Abstand des Volumenelementes zum Standort. (3.7) stellt hierbei eine Form der sog. „Green'schen Funktion“ dar. Die Besonderheit einer solchen Funktion ist, dass sie elementare Lösungen linearer Differentialoperatoren darstellt [8]. Mit Hilfe des Kosinussatzes besteht nun die Abilität, besagten Abstand r' durch die Radien r_V und r und den von selbigen überspannten Winkel φ_V auszudrücken (3.8).

$$r'^2 = r^2 + r_V^2 - 2 \cdot r \cdot r_V \cdot \cos(\varphi_V) \rightarrow \frac{dr'}{r} = r_V \cdot \sin(\varphi_V) \cdot \frac{d\varphi_V}{r'} \quad (3.8)$$

Setzt man (3.8) in (3.7) ein, so erhält man (3.9) und schließlich (3.10), wie auch durch [7] vorhergesagt.

$$U_g = \frac{2\pi \cdot G \cdot \rho}{r} \cdot \int_0^{r_E} r_V \cdot \left(\int_{r_E-r_M}^{r_E+r_M} dr' \right) dr_V \text{ und } r \geq r_E \text{ und } \varphi = \text{konst.} \quad (3.9)$$

$$= G \cdot \frac{m_E}{r} \rightarrow g = \frac{dG \cdot \frac{dm_E}{dr}}{dr} = G \cdot \frac{m_E}{r^2} \quad (3.10)$$

Durch anschließendes Kürzen und Einsetzen in (3.3) wurde in (3.10) nun erfolgreich bewiesen, dass die in Kapitel 1 verwendete Formel zur Berechnung der Fallbeschleunigung auf einer Kugel die richtige war, dass die dort getätigte Annahme, die Kugel könne auch als Punktmasse verstanden werden, zutreffend ist.

3.1.2 Zentrifugalbeschleunigung

Nach (1.5) bzw. (1.9) wird die Zentrifugalbeschleunigung mit $a_{z\text{entri}} = \cos(\varphi) \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$ berechnet. Ähnlich (3.3) lautet auch hier die Formel für das Zentrifugalpotential (3.11), nur dass dabei partiell abgeleitet werden muss.

$$a_{z\text{entri}} = \frac{\partial U_{z\text{entri}}}{\partial r} \quad (3.11)$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (1.5) und (3.11) zusammen und stellt nach $U_{z\text{entri}}$ um, so erhält man für das Zentrifugalpotential (3.12).

$$U_{z\text{entri}} = \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (r_E + h)^2}{T^2} \quad (3.12)$$

3.1.3 Zusammenführung der Potentiale

Nach Zusammenfügen von (3.12) und 3.10 analog zu Kapitel 1 durch Differenz ergibt sich dementsprechend auch die gleiche Formel, wie in (1.9) aus Kapitel 1.

3.1.4 Genauigkeit

Eine Bestimmung der Exaktheit für die „infinitesimale Kugel“ muss nicht geschehen, weil deren Formel der bereits im Kapitel 1 verwendeten (1.9) entspricht.

3.2 Ellipsoid

Ähnlich wie in Kapitel 1 und zwei gilt auch hier wieder bezüglich der Zusammenführung der Potentiale (3.13).

$$U = U_g - U_{z\text{entri}} \quad (3.13)$$

Bei der Berechnung des Gravitationspotentials eines Ellipsoiden ist es zunächst einfacher, selbiges durch die äquivalente Differentialgleichung (3.14) zu lösen.

$$U_g = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\partial U_g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin(\varphi)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \left(\sin(\varphi) \cdot \frac{\partial U_g}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \cdot \frac{\partial^2 U_g}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (3.14)$$

Ist man mit der Potentialtheorie vertraut, so ist das Potential eines homogenen, abgeplatteten Ellipsoiden bekannt. Weiterhin ist das Potential nicht von der Länge abhängig, sondern von dem Radius und der Breite. Auf dem Weg zur Lösung von (3.14) gibt es vielerlei Methoden, auf die ich nicht alle entsprechend meinem mathematischen Wissen und Können eingehen kann. Näher beschreiben möchte ich im Folgenden kurz die Reihenentwicklung, bei welcher die Lösung als Summe ansteigender Ordnung gebildet wird. Für (3.14) ist (3.15) die „richtige“ Entwicklungsgleichung.

$$U_g = \frac{G \cdot m}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (a/r)^\ell \cdot c_\ell \cdot P_\ell \left(\cos \left(\arctan \left(\frac{b^2 \cdot \tan(\varphi)}{a^2} \right) \right) \right) \quad (3.15)$$

Diese ist so vorstellbar, dass der erste Term die Kugel darstellt, der zweite Term die Äquatortwulst, uvm. Die Gleichung des tatsächlichen Geoid, also die Erde mit all ihren Hügeln und Tälern wird nach [7] mit ca. $9,5 \cdot 10^6$ Summanden berechnet; dies ist dann nur noch mittels Computer möglich.

Für die Zwecke dieser Arbeit ist es jedoch ausreichend, den internationalen Referenzellipsoiden, dessen Höhe konstant bleibt und der keine Dichteunterschiede etc. berücksichtigt, zu verwenden (3.16). Selbiger wurde im geodätischen Referenzsystem von 1980 definiert.

$$g(h, \varphi) = \frac{a \cdot g_{\ddot{A}q} \cdot \cos^2(\varphi) + b \cdot g_{Pol} \cdot \sin^2(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2(\varphi) + b^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot \left(1 - \frac{2}{a} \cdot \left(1 + \frac{a-b}{a} + \frac{4\pi^2 \cdot \left(a \cdot \left(1 - \frac{a-b}{a} \cdot \sin^2(\varphi) \right) + h \right)^3}{G \cdot m_E \cdot T^2} - \frac{2(a-b)}{a} \cdot \sin^2(\varphi) \right) \cdot h + \frac{3}{a^2} \cdot h^2 \right) \text{ und } h \geq 0 \text{ m} \quad (3.16)$$

3.3 Genauigkeit

Um die Qualität der Formel zu überprüfen werden im Folgenden Beispielrechnungen mit (3.16) durchgeführt, auf Plausibilität überprüft und mit Messdaten verglichen.

Für diese Berechnungen werden untenstehende Werte angenommen. Die Daten für die Radii a und b sowie für die Erdmasse m sind entnommen aus [3], die Erdumdrehungsdauer T aus [4] und $g_{\ddot{A}q}$, g_{Pol} aus [7].

$$\begin{aligned} a &= 6.378.137 \text{ m} \\ b &= 6.356.752,314 \text{ m} \\ m &= 5,97219 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ T &= 23,93447232 \text{ h} \\ g_{\ddot{A}q} &= 9,7803267715 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ g_{Pol} &= 9,8321863685 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Um die Genauigkeit der Formel zu bestimmen, werden die Messwerte g_{real} aus [5] mit den Formelergbnissen g_{Formel} verglichen. Dabei wird versucht, Breitengrade φ von Stationen auf beiden Horizontalhälften der Erde und verschiedenen Längengraden, möglichst in 10° -Abständen und gleichen Höhen über NN h zu wählen. Schließlich wird die Differenz der beiden Werte Δg mit $g_{real} - g_{Formel}$ gebildet, um die Genauigkeit darzustellen.

φ in $^\circ$	h in m	g_{real} in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	g_{Formel} in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Δg in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
4,94422	5,000	9,78038	9,78069	-0,00031
-12,43170	20,000	9,78301	9,78265	0,00035
23,62533	2,000	9,78974	9,78861	0,00112
-31,86750	155,000	9,79393	9,79425	-0,00033
40,24480	121,106	9,80121	9,80154	-0,00033
50,22860	188,000	9,81055	9,81032	0,00022
59,72686	4,281	9,81860	9,81895	-0,00035
-68,57617	22,240	9,82573	9,82517	0,000558
79,98890	17,000	9,83013	9,83056	-0,00043

Tabelle 3: reale Fallbeschleunigungen im Vergleich zu berechneten Ergebnissen nach dem Ellipsoiden-Infinitesimal-Punktmasse-Modell

4 Bestimmung der Höhe basierend auf Gravimetrie

Einerseits besteht selbstverständlich die Möglichkeit, die Fallbeschleunigung an einem beliebigen Ort eines beliebigen Ellipsoiden zu bestimmen. Andererseits kann durch die Vielzahl an Parametern dieser Formel jene auch für viele andere Zwecke verwendet werden.

Mit Hilfe dieser Gleichung ergibt sich auch eine Möglichkeit, eine Höhenbestimmung unabhängig von Luftdruck oder GPS realisieren, indem man verfügbare Fallbeschleunigungssensoren, wie sie z. B. an moderneren Mobiltelefonen Standard sind, die Fallbeschleunigung messen lässt und die Formel nach der Höhe umstellt.

4.1 Nach Modell der Kugel-Punktmasse

Stellt man (1.9) nach der Höhe über NN h um, so ergibt sich (4.1).

$$h = \frac{- \left(\cos^2(\varphi) \cdot 12\pi^2 \cdot r - t^2 \cdot \left(2g \cdot \cos \left(\frac{\arcsin \left(\frac{g^3 \cdot t^4 - 216m \cdot \cos^4(\varphi) \cdot G \cdot \pi^4}{g^3 \cdot t^4} \right) + 30 \right) - g \right) \right)}{\cos^2(\varphi) \cdot 12\pi^2} \quad (4.1)$$

4.2 Nach Modell der Ellipsoiden-Punktmasse

Stellt man (2.20) nach der Höhe über NN h um, so ergibt sich (4.2).

$$h = g \cdot t^2 \cdot \frac{\cos \left(\frac{1}{3} \cdot \arcsin \left(1 - \cos \left(\arctan \left(\frac{\tan(\varphi) \cdot a^2}{b^2} \right) - \varphi \right) \cdot \frac{m \cdot G \cdot \cos^4(\varphi) \cdot 216\pi^4}{g^3 \cdot t^4} \right) + 30 \right)}{\cos^2(\varphi) \cdot 6\pi^2} + \frac{-\sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\varphi) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi)} \cdot g \cdot t^2 - 12 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \pi^2}{12 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\varphi) + b^2 \cdot \cos^2(\varphi)} \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \pi^2} \quad (4.2)$$

4.3 Nach Modell der Ellipsoiden-Infinitesimal-Punktmasse

Möchte man (3.16) nach der Höhe über NN h umstellen, so ergibt sich dabei eine Gleichung von so großem Umfang, sodass sie nicht mehr geschlossen aufschreibbar ist, zumindest nicht im Rahmen der Seitenbegrenzung der Arbeit.

Dennoch kann sie durch den Computer ausgerechnet werden und wird so auch im nächsten Unterkapitel zur Genauigkeit mit aufgeführt werden.

4.4 Genauigkeit

In der folgenden Tabelle werden die Genauigkeiten der oben umgestellten Formeln bei ihrem nach den obigen Genauigkeitstabellen genauesten Wert φ_{genau} hinsichtlich der Abweichung der Höhe über NN Δh , gebildet durch $h_{real} - h_{Formel}$ und dem Einfluss einer Winkeländerung $\frac{h}{\varphi}$ in den mittleren Breiten betrachtet.

	PM-Kugel	PM-Ellipsoid	Infin.-PM-Ellipsoid
φ_{genau} in $^\circ$	40,24480	-31,86750	50,22860
h_{real} in m	121,106	155,000	188,000
h_{Formel} in m	-261,524	-592,846	115,832
Δh in m	-140,418	-437,846	72,168
$\frac{h}{\varphi}$ in $\frac{m}{^\circ}$	-189,472	511,060	-287,817

Tabelle 4: reale Höhen über NN im Vergleich zu berechneten Ergebnissen nach den verschiedenen Modellen

Aus diesen Daten lässt sich entnehmen, dass die Formel des Punktmasse-Ellipsoiden in diesem Fall am ungenauesten, die des infinitesimal-Punktmasse-Ellipsoiden am genauesten. Dennoch muss beispielsweise die geographische Breite ziemlich genau bestimmt werden, weil ihre Änderung die Höhe durchaus stärker beeinflusst. Wichtiger ist aber, wie genau die Fallbeschleunigung bestimmt werden muss, damit die Ungenauigkeit bei der Methode des infinitesimal-Punktmasse-Ellipsoiden 100 m nicht überschreitet. Weitere Untersuchungen durch meine Person ergaben, dass dies ab einer Abweichung $\pm 0,00015 \frac{m}{s^2}$ geschieht. Diese Werte liegen auch nahe im Genauigkeitsbereich der Formel, wodurch die Abweichungen zu erklären sind. In diesem Bereich sind jedoch auch die genauesten unter den Mobiltelefon-Sensoren, weshalb eine Bestimmung der Höhe mit jenen sicher Ungenauigkeiten im doppelten Maße wie oben mit sich bränge.

5 Didaktik

In der Einleitung wurde auch die Betrachtung der Bedeutung dieser Arbeit in der Didaktik aufgeführt.

In den vorherigen Kapiteln ist sehr gut erkennbar, wie das Verständnis der Formel mit den elementaren mathematischen, physikalischen und geographischen Methoden zu verstehen ist.

Während Schülerinnen und Schüler der zehnten Klasse im Physik- und Astronomieunterricht beginnen, sich mit der Gravitation im Rahmen von Newtons Theorien zu beschäftigen, lernen diese dabei grundlegend Gleichung (1.1), ggf. bei erweiterten Berechnungen (1.2) kennen. In späteren Unterrichtseinheiten führen die Schüler dann Experimente aus, beispielsweise im Fachgebiet Schwingungen und Wellen, bei welchen die Größe g als beeinflussender Faktor vorkommt. Möglicherweise werden auch Methoden besprochen, wie man durch solche Experimente, wie z. B. ein solches mit einem Pendel, die Fallbeschleunigung bestimmen kann. Selten wird dabei darauf eingegangen, dass es eine Vielzahl weiterer Einflussfaktoren gibt, die außerhalb der Dimensionen „Luftwiderstand“ oder „schiefer Tisch“ liegen; dabei zweifelt dann der Schüler an sich selbst — „Warum ist mein Ergebnis nicht genau, obwohl ich mir beim Messen so viel Mühe gebe?“.

Dennoch beschäftigen sich die Schüler bereits ab der achten Klasse mit der Gestalt der Erde. Sie lernen zunächst, dass die Erde keine Kugel, nicht einmal ein Ellipsoid ist, sondern sehr unregelmäßig. Später wird ihnen womöglich beigebracht, dass das Innere der Erde nicht gleich ist, dass es unterschiedliche Gesteinsschichten gibt, verschiedene Böden mit verschiedenen Eigenschaften und besondere Anordnungen von Land und Wasser.

Kommt der Physik-Unterricht meiner Meinung nach oft zu kurz, ist es von Vorteil, als naturwissenschaftlich interessierter Schüler das Wahlpflichtfach NaWi zu wählen. Hierbei erlangt/entwickelt man Kenntnisse und Fähigkeiten, die es einen ab dem Themengebiet

„Raumfahrt“ ermöglichen, auch im Rahmen des Unterrichts, nähere Überlegungen dazu durchzuführen, insbesondere zur Äquatorialbeschleunigung, wonach auch (1.6) verständlich wird.

Ebenfalls des Schülers mathematische Kenntnisse schreiten voran: Er lernt bis Klasse 10 wichtige (trigonometrische) Dreiecksbeziehungen kennen und lernt, sie auch auf praxisbezogene Problemfälle anzuwenden. Daher ist es ihm dann auch möglich zu verstehen, woher sich die weiteren Vorfaktoren in Kapitel 1 ergeben.

Aber bereits bei Erreichen des zweiten Kapitels wird die Erklärung schwierig: Leider erhalten die Schüler in ihrer gymnasialen Laufbahn planmäßig keine Informationen über Anwendungen der Mathematik in einer Ellipse. Dadurch werden große Teile des besagten Kapitels, die im eigentlichen nur unseren Erdkörper auf nicht sehr komplizierte Weise beschreiben, unergründbar für den Schüler.

Dennoch lässt sich für einen Oberstufenschüler zumindest der erste Teil des 3. Kapitels mittels seiner mathematischen Fähigkeiten im Bereich der Analysis ergründen. Belegt der Schüler einen Geographie-Kurs mit erweiterten Anforderungsniveau, so wird darin womöglich detaillierter über die Gestalt der Erde gesprochen, möglicherweise ein wenig in die Gebiete der Geophysik vorgedrungen. Dadurch sollte es ihm leichter fallen, zumindest den Kerngedanken der Kapitel 1 und zwei zu verstehen.

Weitere Ausführungen in Kapitel 3 sind dann allerdings nur noch schwer verständlich. Erst ein Geophysik-Student im ungefähr zweiten Semester wird sich evtl. für kürzere Zeit einem solchen oder ähnlichen Problem widmen; ein Teil der verwendeten Quellen entspricht auch einem Lehrbuch für Masterstudenten der Geophysik, die sich auf Geodäsie spezialisiert haben. Doch auch diese werden dabei mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht alle Faktoren betrachten können.

So wird deutlich, dass die einfacheren, aber ungenaueren Modelle von Schülern bis zu einem gewissen Grad verstanden werden können. Je genauer die Formel werden soll, desto schwieriger wird auch, zu verstehen, wie die Formel aufgebaut ist, welche Komponenten sie beinhaltet. Dennoch erachte ich (2.20) als einen guten Kompromiss, um interessierten Schülern die Physik in der Geographie — oder besser: die Geographie in der Physik — nahezubringen.

Zusammenfassung und Ausblick

Meine Untersuchungen haben gezeigt, dass die Fallbeschleunigung auf der Erde von einer Vielzahl von Parametern abhängig ist. In meine Betrachtungen bezog ich die gravitativ bedingte Fallbeschleunigung mit ein, ebenso die Zentrifugalbeschleunigung, ließ aber weitere Faktoren entsprechend dem Rahmen meiner Möglichkeiten außen vor.

Die Fallbeschleunigung wird weiterhin beeinflusst durch die Verteilung von Land und Wasser, durch die Position von Sonne und Mond, die daraus resultierenden Gezeiten, Massen über dem Bezugspunkt (z. B. Wolken), der Gesteinszusammensetzung, Bergen, Tälern und vielem mehr. Dies alles mit in dieses Projekt einzubeziehen würde auch deutlich weniger Nutzen als Arbeit mit sich bringen.

Zu bemerken ist aber, dass die Schwankungen der Gleichungen aus Kapitel 1 und zwei einfachen mathematischen Funktionen ähneln, was bedeutet, dass es bei den Betrachtungen einen mit dieser Funktion zu- bzw. abnehmenden weiteren Faktor geben muss, der

aber bis jetzt noch nicht betrachtet wurde.

Weiterhin zeigten meine Ergebnisse, dass die Genauigkeit des Kugelmodells am geringsten, die des Ellipsoiden-Infinitesimalpunktmasse-Modells am höchsten ist. Dieses Erkenntnis lässt sich nutzen: Die Genauigkeit letzteren Modells ist so groß, dass es theoretisch möglich wäre, diese zur Bestimmung anderer Größen zu verwenden. Im letzten Kapitel wurde dabei besonders die Höhe über dem Meeresspiegel betrachtet. Stellt man die Formel nach diesem Parameter um, so ist man mit handelsüblichen Beschleunigungssensoren, wie sie z. B. in Mobiltelefonen vorhanden sind, in der Lage, seine Höhe einigermaßen genau zu bestimmen.

In Fortsetzung zu dieser schriftlichen Arbeit ist daher angedacht, eine Applikation für Mobiltelefone zu schreiben, durch die jenes möglich ist oder zumindest ersichtlich ist, wie genau so etwas praktisch funktioniert, wie stark auch die Abweichung bei praktischen Messungen ist.

Abbildungs-, Unterstützer- und Quellenverzeichnis

- [6] 1998 Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg: Gravitationspotential. www.spektrum.de/lexikon/physik/gravitationspotential/6096 (02.01.2018)
- [8] 1998 Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg: Green-Funktion. www.spektrum.de/lexikon/physik/green-funktionen/6118 (03.01.2018)
- [5] BUREAU GRAVIMÉTRIQUE INTERNATIONAL: Absolute Gravity Database - Meta-Data. <http://bgi.obs-mip.fr/en/data-products/Gravity-Databases/Absolute-Gravity-data> (07.05.2017)
- [7] CLAUSER, CHRISTOPH: Einführung in die Geophysik. Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde, Aachen 2016
- [3] NASA (WILLIAMS, DR. DAVID R.): Earth Fact Sheet. nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html (04.10.2017)
- [4] SEIDELMANN, ED. (1992): o.T. In: SPRINGER: Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, Mill Valley, California. S. 706 u. 316
- [1] STUMPE, RAINER (2017): Die Mittelpunktsgleichung Ellipse. www.rainerstumpe.de/HTML/ellipse_mpg.html (19.11.2017)
- [2] WIKIPEDIA, DIE FREIE ENZYKLOPÄDIE (2017): Ellipse. de.wikipedia.org/wiki/Ellipse (27.09.2017)
- [Abb. 1] GRUNERT, FLORIAN (2018): Visualisierung der Ellipsenproblematik. Eigene Darstellung
- [Abb. 2] GRUNERT, FLORIAN (2017): Visualisierung der Ellipsenproblematik. Eigene Darstellung
- [Abb. 3] GRUNERT, FLORIAN (2017): Visualisierung der verschiedenen Beschleunigungen. Eigene Darstellung
- [Unterstützer] KAISER, THOMAS: Gabe von nützlichen Tipps bei der Erstellung der Arbeit